Ministerul Educației și Cercetării

art Klett

Marius Perianu
Dana Heuberger
Ștefan Smărăndoiu
Gabriel Popa
Cătălin Stănică

Matematică

Clasa a VIII-a

8

Cuprins

U1 Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

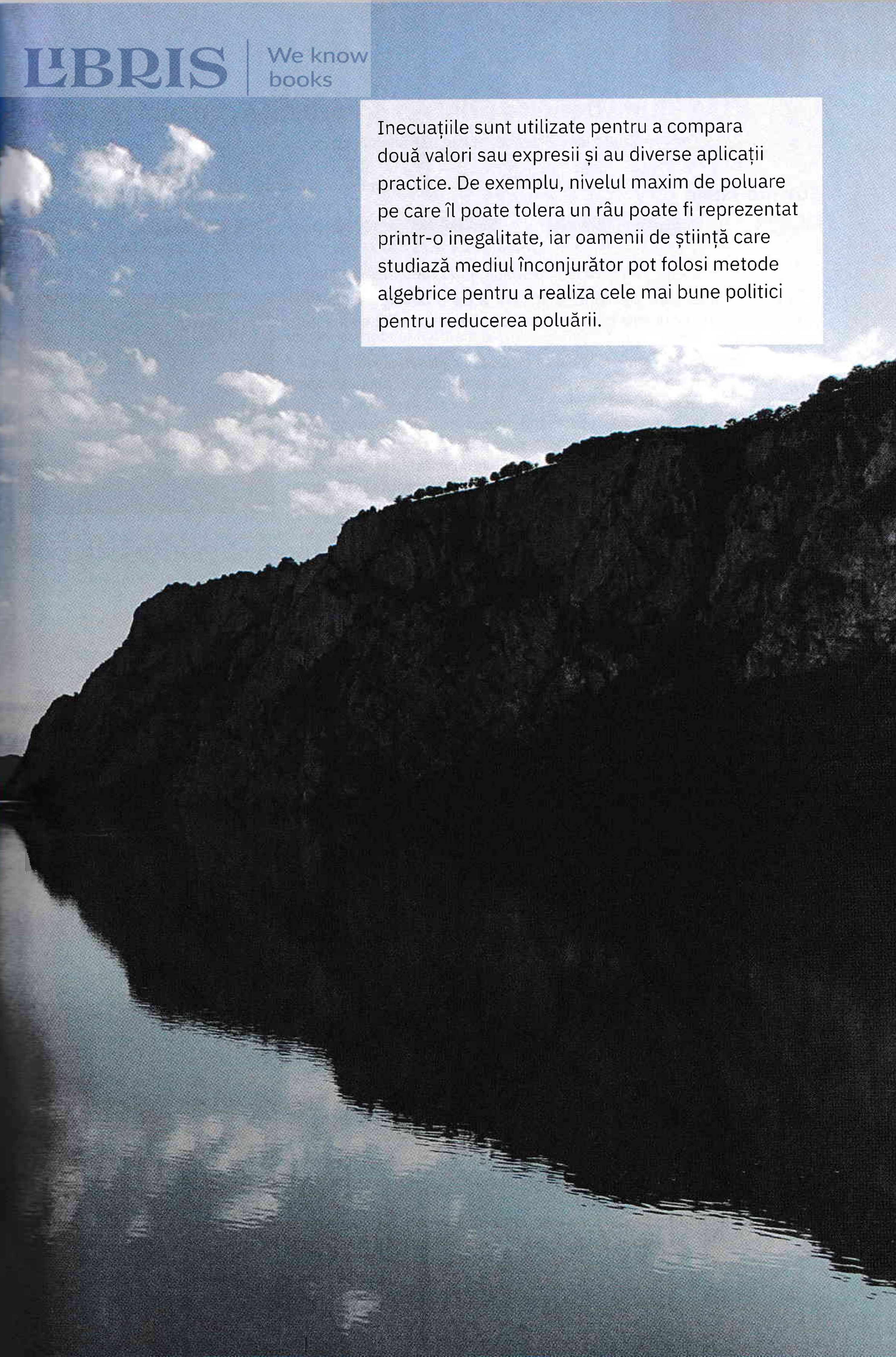
Lecția 1 Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

Lecția 2 Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor

Lecția 3 Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq$, $>$, $<$), $a, b \in \mathbb{R}$

Proiect

Recapitulare și evaluare



Inecuațiile sunt utilizate pentru a compara două valori sau expresii și au diverse aplicații practice. De exemplu, nivelul maxim de poluare pe care îl poate tolera un râu poate fi reprezentat printr-o inegalitate, iar oamenii de știință care studiază mediul înconjurător pot folosi metode algebrice pentru a realiza cele mai bune politici pentru reducerea poluării.

Lecția 1: Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

Cuvinte-cheie

mulțime | proprietate comună | intersecție | reuniune | apartenență | incluziune

Utilitate

În clasele anterioare am considerat, fără a da o definiție riguroasă, că o mulțime este o colecție bine precizată de obiecte (numite elemente), privită ca un întreg.

Activitatea umană, în toate formele sale, necesită adesea nu doar gruparea în mulțimi a unor obiecte, idei, acțiuni sau fenomene, ci și clasificarea acestora după diferite criterii.

Un exemplu la îndemână: observând lumea înconjurătoare, putem distinge imediat între *plante* și *animale*, deci putem considera mulțimea plantelor (regnul vegetal) și mulțimea animalelor (regnul animal). Analizând animalele după un anumit criteriu, de exemplu, după prezența sau absența coloanei vertebrale, constatăm că regnul animal este constituit din mulțimea animalelor *vertebrate* și mulțimea animalelor *nevertebrate*.

Matematic, un proces de clasificare, realizat pe baza unui criteriu, conduce la definirea unei mulțimi de obiecte cu o proprietate comună (criteriul dat).

1.1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor

Situație problemă

Echipa de baschet a școlii este formată din 12 elevi. Patru dintre ei ne zâmbesc din imaginea alăturată, îmbrăcați în echipamentul albastru al echipei.

Mulțimea B, a componenților echipei, poate fi scrisă enumerând efectiv elementele sale, adică menționând numele tuturor elevilor: Dan, Adi, Ion, Toni și așa mai departe.

Mulțimea B poate fi identificată și în alt mod, ținând seama că fiecare element al ei are calitatea de membru al echipei de baschet. Aceasta este o proprietate caracteristică tuturor elementelor mulțimii B și numai lor, nefiind verificată de elementele care nu aparțin mulțimii B (de exemplu, de Alin).

Mulțimea B se poate scrie și astfel:

$$B = \{x \mid x \text{ este membru al echipei de baschet a școlii}\}.$$

Citim: B este mulțimea elementelor x, cu proprietatea că x este membru al echipei de baschet a școlii.

De reținut

Dacă elementele unei mulțimi A au o proprietate comună, notată cu p, specifică lor și numai lor, mulțimea A se poate defini și astfel:

$$A = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}.$$

Citim: A este mulțimea formată din elementele x care au proprietatea p.

Proprietatea p trebuie formulată astfel încât să permită identificarea exactă a elementelor mulțimii (și numai a acestora). De exemplu, considerând mulțimea $A = \{x \mid x \text{ este cifră arabă}\}$, putem afirma, fără echivoc, că $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Nu orice mulțime se poate scrie însă folosind o proprietate comună a elementelor. De exemplu, mulțimea $T = \{7, 11, \text{elefant}, \text{contrabas}, \Delta, \bigcirc\}$ nu poate fi definită pe baza unei proprietăți specifice elementelor sale.

Observații

1. Pentru definirea unei mulțimi, se pot utiliza și două sau mai multe proprietăți pe care le verifică elementele sale.
Considerând mulțimea A din Figura 1, orice element $x \in A$ are proprietățile: x este număr natural, x este par, $x \leq 16$. Scriem:
$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este număr par}, x \leq 16\}.$$
Se observă că A poate fi definită și astfel: $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}, k \leq 8\}$.

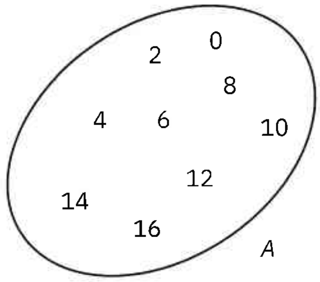


Figura 1

2. Dacă elementele mulțimii A aparțin unui domeniu dat (altfel spus, mulțimea A este submulțime a unei mulțimi definite anterior), putem indica acest lucru înainte de bara verticală.
De exemplu, pentru a defini mulțimea A a numerelor naturale cel mult egale cu 4, vom scrie: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$, în loc de $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$.

3. Pentru simplificarea scrierii, în special în cazul mulțimilor de numere reale, dacă elementele se pot determina printr-o formulă de calcul (au o formă comună), se poate scrie această formulă (proprietatea comună) înainte de bara verticală.
De exemplu, pentru a indica mulțimea numerelor naturale care dau restul 2 la împărțirea cu 6 (adică mulțimea numerelor de forma $6k + 2$, unde $k \in \mathbb{N}$), în loc de $A = \{x \mid x = 6k + 2, k \in \mathbb{N}\}$, vom scrie, mai simplu, $A = \{6k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

4. Pentru o mulțime finită, având un număr relativ mic de elemente, enumerarea elementelor între acolade sau utilizarea unei diagrame Venn-Euler oferă o imagine rapidă asupra mulțimii date. În schimb, mulțimile infinite se scriu indicând forma generală a elementelor lor.
Astfel, mulțimea multiplilor întregi ai unui număr natural n se scrie: $M_n = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Mulțimea numerelor raționale se scrie $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ sau $\mathbb{Q} = \left\{ \pm\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exemple

1. Scrierea unei mulțimi date identificând o proprietate comună a elementelor
Considerăm mulțimile:
a. $A = \{1, 3, 9, 27, 81\}$; **b.** $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$; **c.** $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
Vom identifica, pe rând, câte o proprietate comună a elementelor fiecărei mulțimi.
a. Se observă că $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$ și $81 = 3^4$. Așadar:
$$A = \{x \mid x = 3^k, k \in \mathbb{N}, k \leq 4\} = \{3^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}.$$
b. Numerele 0, 1, 4, 9, 16, 25 și 36 sunt pătrate perfecte, mai precis pătratele numerelor 0, 1, 2, 3, 4, 5 și 6. În consecință:
$$B = \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}, k \leq 6\} = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 6\}.$$
c. Elementele mulțimii sunt numerele întregi mai mari decât -5 și mai mici decât 5 (sau mai mari sau egale cu -4 și mai mici sau egale cu 4). Ca urmare:
$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 5\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 4\}.$$
Folosind proprietățile modulului, putem scrie și $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$ sau $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$.

2. Enumerarea elementelor unei mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor
Fie mulțimea $D = \{k + k^2 \mid k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq 5\}$. Elementele sale sunt numerele naturale x care se obțin prin adunarea unui număr natural k, $2 \leq k \leq 5$, cu pătratul său. Astfel:
- pentru $k = 2$, obținem $x = 2 + 2^2 = 6$;
- pentru $k = 3$, obținem $x = 3 + 3^2 = 12$;
- pentru $k = 4$, obținem $x = 4 + 4^2 = 20$;
- pentru $k = 5$, obținem $x = 5 + 5^2 = 30$.

În concluzie, $D = \{6, 12, 20, 30\}$.

3. Studiul apartenenței unui element la o mulțime definită printr-o proprietate a elementelor
Considerăm mulțimile $A = \{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \mid x = 2t + 1, t \in \mathbb{N}\}$. Se pun problemele:
a. Care dintre numerele naturale 122, 321, 305 aparține mulțimii A, respectiv mulțimii B?
b. Care sunt elementele comune mulțimilor A și B?

a. Observăm că $122 = 3 \cdot 40 + 2$, deci $122 \in A$. La fel, $321 = 2 \cdot 160 + 1$, adică 321 aparține mulțimii B.
Presupunând că $122 \in B$, ar trebui să existe $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $2t + 1 = 122$, absurd, deoarece $2t + 1$ este număr impar, iar 122 este par. Așadar, $122 \notin B$.

Analog, presupunând că $321 \in A$, ar rezulta că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $3k + 2 = 321$, adică $3k = 319$, de unde $k = \frac{319}{3} = 106\frac{1}{3}$, care nu este număr natural. Rezultă că $321 \notin A$.

Deoarece $305 = 3 \cdot 101 + 2 = 2 \cdot 152 + 1$, deducem că $305 \in A$ și $305 \in B$, adică $305 \in A \cap B$.

b. Fie x un element comun mulțimilor A și B, ales arbitrar. Atunci există $k, t \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = 3k + 2$ și $x = 2t + 1$, deci $2t = 3k + 1$. Ca urmare, $3k + 1$ este număr natural par, deci k este impar, adică are forma $2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, de unde rezultă că $x = 3k + 2 = 3(2p + 1) + 2 = 6p + 5$.

Așadar, dacă $x \in A \cap B$, atunci x are forma $6p + 5$, $p \in \mathbb{N}$. Observând că:

$$6p + 5 = 3 \cdot (2p + 1) + 2 \in A \quad \text{și} \quad 6p + 5 = 2 \cdot (3p + 2) + 1 \in B,$$

rezultă că orice număr de forma $6p + 5$, $p \in \mathbb{N}$, aparține atât mulțimii A, cât și mulțimii B, deci $A \cap B = \{x \mid x = 6p + 5, p \in \mathbb{N}\}$.

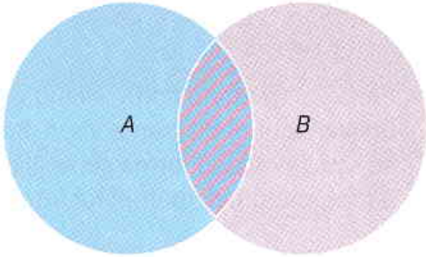
1.2. Reuniunea, intersecția și diferența a două mulțimi. Aplicații

Observație

Ne reamintim că intersecția a două mulțimi A și B, notată prin $A \cap B$, este mulțimea formată din elementele comune ale mulțimilor A și B.

Putem defini mulțimea $A \cap B$ folosind proprietatea elementelor sale de a aparține atât mulțimii A, cât și mulțimii B. Așadar:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$



Analog, elementele reuniunii $A \cup B$ au proprietatea că aparțin fie lui A, fie lui B, deci:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Similar, putem defini și diferența a două mulțimi printr-o proprietate comună a elementelor sale:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\} \quad \text{sau} \quad B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ și } x \notin A\}.$$

Investigație

Se împart elevii în patru grupe. În fiecare grupă se alege un purtător de cuvânt.

Fiecare grupă primește o coală de carton pe care sunt scrise mulțimile:

Grupa 1: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \le x \le 11\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \le x \le 15\}$.

Grupa 2: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 16 \le x \le 21\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 12 \le x \le 24\}$.

Grupa 3: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x \le 8\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 \le x \le 14\}$.

Grupa 4: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < x \le 13\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 12 < x \le 18\}$.

Cerințe comune:

1. Scrieți mulțimile A și B prin enumerarea elementelor și reprezentați-le cu ajutorul diagramelor.
2. Determinați mulțimile $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
3. Scrieți fiecare dintre mulțimile $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$ folosind o proprietate comună a elementelor, exprimată, acolo unde este posibil, sub forma unei duble inegalități.

Cerință specifică:

4. Determinați mulțimile $E \cap F$ și $E \cup F$, unde $E = \{x \in \mathbb{N} \mid a \le x \le b\}$ și $F = \{x \in \mathbb{N} \mid c \le x \le d\}$, iar a, b, c, d sunt numere naturale care îndeplinesc condiția:
grupa 1: $a < c < b < d$;
grupa 2: $a < b < d < c$;
grupa 3: $a < b < c < d$;
grupa 4: $a < c < d < b$.

Cerințele se rezolvă pe coala de carton primită, în timp de 15 minute. După îndeplinirea sarcinilor, fiecare purtător de cuvânt prezintă în fața clasei activitățile efectuate și modul de rezolvare.

Se dezbat rezultatele obținute la cerința specifică, în funcție de ordonarea numerelor a, b, c, d. Suplimentar, se studiază cazurile în care unele dintre numerele a, b, c, d sunt egale.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Mulțimea $\mathcal{F}$ conține triunghiuri, cercuri și pătrate, care pot fi *pline* (colorate complet) sau *goale* (colorate doar pe contur), cu albastru, roșu sau cu verde (Figura 2). Reprezentați cu ajutorul unor diagrame Venn-Euler mulțimile:

a. $A = \{x \in \mathcal{F} \mid x \text{ este triunghi}\}$; **b.** $B = \{y \in \mathcal{F} \mid y \text{ colorat cu verde}\}$;

c. $C = \{z \in \mathcal{F} \mid z \text{ este plin}\}$; **d.** $D = \{u \in \mathcal{F} \mid u \in A \text{ și } u \in B \text{ și } u \in C\}$.

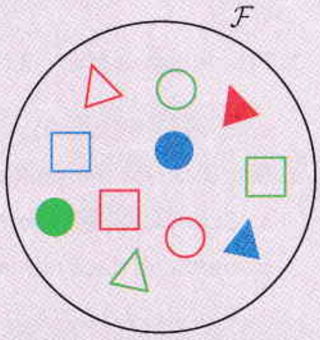
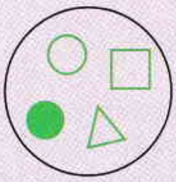
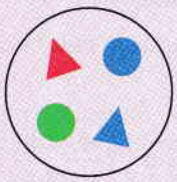
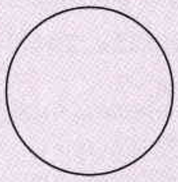


Figura 2

Rezolvare

a. 
b. 
c. 
d. 

2. Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unor proprietăți comune elementelor lor:

a. $A = \{40, 31, 22, 13\}$; **b.** $B = \{6, 4\sqrt{5}, 5\sqrt{6}, 6\sqrt{7}, 14\sqrt{2}\}$;

c. $C = \{10, 15, 20, ..., 95\}$; **d.** $D = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$.

Rezolvare

a. Elementele mulțimii A sunt toate numerele de două cifre care au suma cifrelor egală cu 4: $A = \{\overline{ab} \mid a + b = 4\}$. Putem scrie mulțimea A și sub forma: $A = \{9n + 4 \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 4\}$.

b. Numerele $4\sqrt{5}$, $5\sqrt{6}$, $6\sqrt{7}$ au forma $n\sqrt{n+1}$, unde $n \in \{4, 5, 6\}$. Observând că $6 = 3\sqrt{4}$ și $14\sqrt{2} = 7\sqrt{8}$, putem scrie $B = \{n\sqrt{n+1} \mid n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 7\}$.

c. Elementele mulțimii C sunt toate numerele divizibile cu 5 formate din două cifre. Utilizând faptul că orice număr întreg divizibil cu 5 este de forma $5k$, unde $k \in \mathbb{Z}$, obținem $C = \{5k \mid k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq 19\}$.

d. Mulțimea D conține toți divizorii întregi ai lui 4, deci $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid 4 \vdots n\}$.

3. Precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a. P_1: $\sqrt{7} \in \{x \mid 1 < x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$; **b.** P_2: $-4 \notin \{x \mid |x| \leq 6, x \in \mathbb{N}\}$; **c.** P_3: $237 \in \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$.

Rezolvare

a. Propoziția P_1 este adevărată, deoarece $1 = \sqrt{1} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$.

b. Deoarece $\{x \in \mathbb{N} \mid |x| \leq 6, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, propoziția P_2 este adevărată.

c. Deoarece $15^2 < 237 < 16^2$, numărul 237 nu este pătrat perfect. P_3 este o propoziție falsă.

4. Arătați că elementele mulțimii $C = \{x \mid x = 6k + 13, k \in \mathbb{N}\}$ dau restul 1 la împărțirea cu 3.

Rezolvare

Un element oarecare al mulțimii C este de forma $x = 6k + 13 = 3 \cdot 2k + 3 \cdot 4 + 1 = 3 \cdot (2k + 4) + 1$. Cum $1 < 3$, din teorema împărțirii cu rest rezultă că restul împărțirii lui x la 3 este 1.

5. Fie a un număr natural. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid 7 < x \leq a, x \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \mid x \vdots 5, x \in \mathbb{N}\}$. Determinați mulțimea $C = \{a \in \mathbb{N} \mid \text{mulțimea } A \cap B \text{ are 20 de elemente}\}$.

Rezolvare

Elementele comune celor două mulțimi sunt multipli de 5 mai mari ca 7, cel mai mic element comun fiind $10 = 5 \cdot 2$. Cele 20 de elemente ale mulțimii $A \cap B$ sunt 20 de multipli consecutivi ai lui 5 începând cu 10, adică numerele de la $5 \cdot 2$ la $5 \cdot 21$. Așadar, $A \cap B = \{10, 15, 20, ..., 105\}$, deci $a \geq 105$. Presupunând că $a \geq 110$, ar rezulta că $110 \in A \cap B$, adică $A \cap B$ ar avea cel puțin 21 de elemente. În concluzie, $a < 110$, de unde rezultă că $C = \{105, 106, 107, 108, 109\}$.

Probleme propuse

1. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 4\}$ și $B = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z| \leq 2\}$.

a. Reprezentați mulțimile A și B cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

b. Reprezentați elementele mulțimii $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ într-un sistem de axe ortogonale xOy.

2. Scrieți mulțimile de mai jos folosind o proprietate comună a elementelor lor:

a. $A = \{0, 7, 14, 21, 28\}$; b. $B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, ...\}$; c. $C = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, ...\}$.

3. Fie mulțimea $M = \left\{-2,(6); 0; 2\sqrt{3}; \pi; -\frac{15}{5}; \sqrt{\frac{9}{4}}\right\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

a. $A = \{x \in M \mid x \geq 0\}$; b. $B = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{Q}\}$; c. $C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$; d. $D = \{x \in M \mid x \leq -3\}$.

4. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = 6k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$.

a. Scrieți câte trei elemente din fiecare mulțime.

b. Verificați dacă numerele 112, 204 și 333 aparțin celor două mulțimi.

c. Arătați că $A \subset B$ și $B \not\subset A$.

5. Se dau mulțimile $A = \left\{\frac{x}{x+1} \,\middle|\, x \in \mathbb{N}^*, x \leq 20\right\}$ și $B = \left\{\frac{x+1}{x+3} \,\middle|\, x \in \mathbb{N}, x \leq 20\right\}$.

a. Stabiliți câte elemente au mulțimile A și B.

b. Comparați produsul elementelor mulțimii A cu produsul elementelor mulțimii B.

6. Determinați mulțimile:

a. $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy + 5 = 0\}$; b. $B = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + 5y = 40\}$;

c. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + 2y = 9 \text{ și } 2x - y = 8\}$; d. $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy + 3x + 3y = 12\}$.

7. Determinați numărul elementelor mulțimilor:

a. $A = \{\overline{abc} \mid a + c = 3\}$; b. $B = \{\overline{ab} \in \mathbb{N} \mid a < b\}$; c. $C = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z| < 18\}$; d. $D = \{x \mid x^2 \leq 11, x \in \mathbb{Z}\}$.

8. Stabiliți care dintre mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^{100}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{100} \leq x \leq 2^{101}\}$ are mai multe elemente.

9. Se consideră mulțimile $A = \{1, 4, 7, 10, 13, ...\}$, $B = \{2, 5, 8, 11, 14, ...\}$ și $C = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

a. Scrieți fiecare dintre mulțimile A și B cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor lor.

b. Identificați cele mai mici cinci elemente ale mulțimii $A \cap C$.

c. Arătați că mulțimile B și C sunt disjuncte.

d. Demonstrați că $A \cap B = \varnothing$.

10. Notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea punctelor planului și fixăm două puncte $A, B \in \mathcal{P}$. Determinați mulțimile $\mathcal{M}_1 = \{X \in \mathcal{P} \mid XA = XB\}$ și $\mathcal{M}_2 = \{X \in \mathcal{P} \mid AX = AB\}$, apoi reprezentați-le geometric.

Autoevaluare

1. Scrieți fiecare dintre mulțimile A, B, C cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor:

a. $A = \{0, 1, 8, 27, 64, 125\}$; b. $B = \{6, 12, 18, 24, 30\}$; c. $C = \{-30, -25, -20, -15\}$. (3p)

2. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 25\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x \leq 25\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a. P_1: $A \subset B$; b. P_2: $B \subset A$; c. P_3: $A = B$. (3p)

3. Determinați mulțimea $M = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{2x-5}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 2: Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor

Cuvinte-cheie

interval de numere reale	interval deschis	interval închis
interval mărginit	infinit	interval nemărginit
reprezentare geometrică	intersecție	reuniune

Utilitate

Fenomenele sau procesele din viața de zi cu zi se derulează deseori între anumite limite. În vorbirea curentă, spunem că un astfel de eveniment (proces, fenomen) se desfășoară într-un anumit *interval*, definit de condițiile specifice evenimentului respectiv.

În timpul unei etape de raliu, o mașină parcurge o distanță bine delimitată (intervalul dintre start și sosire), într-o perioadă măsurată cu precizie (un interval de timp).

Evenimentele hidrologice desfășurate în amonte determină ca nivelul apei dintr-un râu să se modifice între anumite limite – astfel, nivelul apei variază într-un anumit interval.

Să observăm că toate aceste procese sunt *continue*: mașina de raliu nu poate ajunge de la start la sosire fără să treacă prin toate punctele de pe traseu, după cum nivelul apei nu poate crește de la 8 cm la 12 cm fără să fi ajuns la 9,12 cm, la 10,243 cm sau la orice altă valoare cuprinsă între 8 cm și 12 cm.

Pentru a studia astfel de procese, este nevoie să descriem mulțimile de numere reale care, odată cu orice două valori ale lor, *a* și *b*, conțin toate valorile intermediare cuprinse între *a* și *b*.

2.1. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor

Mate practică

Meteorologia este disciplina care se ocupă cu studiul fenomenelor atmosferice și prognoza lor. Majoritatea activităților umane depind de condițiile meteo, iar prognoza fenomenelor atmosferice ne ajută în planificarea acestor activități.

Dimineața, la ora 6^{00}, Rareș observă că termometrul arată –3 °C.

Măsurând temperaturile din oră în oră, Rareș obține valorile:

6^{00}	7^{00}	8^{00}	9^{00}	10^{00}	11^{00}	12^{00}	13^{00}	14^{00}
–3 °C	–2,2 °C	–1 °C	1,5 °C	3 °C	4,2 °C	6 °C	7,4 °C	9 °C

În ce interval orar s-a atins temperatura de 0 °C? Dar cea de 5 °C?

Ce temperaturi s-au înregistrat până la ora 14^{00}?

Pe măsură ce afară se încălzește, temperatura nu poate ajunge de la o valoare mai mică la una mai mare fără să treacă prin valorile intermediare.

Astfel, temperatura de 0 °C s-a atins între ora 8^{00} și ora 9^{00}, iar cea de 5 °C între 11^{00} și 12^{00}.

Temperaturile înregistrate între orele 6^{00} și 14^{00} sunt cuprinse între –3 °C și 9 °C sau, așa cum citește Rareș în aplicația *Vremea* de pe telefonul său mobil, sunt situate în intervalul de la –3 °C la 9 °C.

De reținut

Un interval de numere reale este o mulțime I de numere reale cu proprietatea că, pentru orice două numere reale $a, b \in I$, cu $a < b$, orice număr real cuprins între a și b aparține mulțimii I.

Cu alte cuvinte, o mulțime $I \subset \mathbb{R}$ este interval dacă:

pentru orice $a, b \in I$, $a < b$, și orice $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < x < b$, rezultă $x \in I$.

Având în vedere corespondența dintre mulțimea numerelor reale și axa numerelor, *intervalele de numere reale se reprezintă geometric* sub formă de segment, semidreaptă sau dreaptă (întreaga axă).

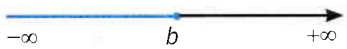
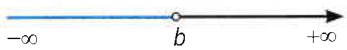
Intervalele se clasifică în:
- *intervale mărginite* – a căror reprezentare geometrică este un segment;
- *intervale nemărginite* – a căror reprezentare geometrică este fie o semidreaptă, fie axa numerelor.

În tabelul de mai jos sunt prezentate atât toate tipurile de intervale de numere reale, denumirile, cât și reprezentarea geometrică a acestora pe axa numerelor. Spunem că un segment este *închis* dacă își conține capetele, *deschis* dacă nu le conține, respectiv *semideschis* dacă doar unul dintre capete aparține segmentului. Similar, vom numi o semidreaptă *închisă* dacă aceasta își conține originea, și *deschisă*, în caz contrar. Pentru a reprezenta geometric o extremitate a unui interval care aparține acestuia, se folosește un punct plin sau o paranteză dreaptă, iar pentru capetele care nu aparțin intervalului, se utilizează un punct gol sau o paranteză rotundă. Simbolurile $-\infty$ (*minus infinit*) și $+\infty$ (*plus infinit*) nu sunt numere reale; acestea se utilizează pentru a scrie intervale nemărginite de numere reale.

Intervale mărginite

Reprezentarea geometrică	Figura geometrică	Definiția intervalului	Denumirea intervalului
	segment închis	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	interval închis: $a, b \in [a, b]$
	segment deschis	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	interval deschis: $a, b \notin (a, b)$
	segment semideschis	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	interval deschis la stânga și închis la dreapta: $a \notin (a, b]$, $b \in (a, b]$
	segment semideschis	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	interval închis la stânga și deschis la dreapta: $a \in [a, b)$, $b \notin [a, b)$

Intervale nemărginite

Reprezentarea geometrică	Figura geometrică	Definiția intervalului	Denumirea intervalului
	semidreaptă închisă	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	interval închis la stânga: $a \in [a, +\infty)$
	semidreaptă deschisă	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	interval deschis la stânga: $a \notin (a, +\infty)$
	semidreaptă închisă	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$	interval închis la dreapta: $b \in (-\infty, b]$
	semidreaptă deschisă	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	interval deschis la dreapta: $b \notin (-\infty, b)$
	dreaptă	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$	mulțimea numerelor reale

Observații

1. Folosind paranteze rotunde/paranteze drepte pentru a marca extremitățile, intervalele $[a, b]$, (c, d), $[m, \infty)$, $(-\infty, n)$ se reprezintă astfel:

2. Notațiile $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $[a, +\infty]$ sau $(a, +\infty]$ nu au sens. Mulțimile notate cu (a, a), $(a, a]$ sau $[a, a)$ nu conțin numere reale: $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \varnothing$. Mulțimea notată cu $[a, a]$ se reduce la un punct (interval degenerat): $[a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le a\} = \{a\}$.
3. Considerăm mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \le 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R}^* \mid -3 < x \le 2\}$; $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \le 2\}$. Dintre acestea, doar mulțimea A reprezintă un interval de numere reale; mai exact, $A = (-3, 2]$. Mulțimea B conține elementele -1 și 1, dar nu conține elementul 0, care este cuprins între -1 și 1, deci nu este interval. Totuși, mulțimea B se poate scrie ca o reuniune de două intervale distincte: $B = (-3, 0] \cup (0, 2]$. Mulțimea C este intersecția intervalului $(-3, 2]$ cu mulțimea numerelor întregi: $C = (-3, 2] \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Justificați de ce C nu este un interval!

Exemple

1. Considerăm următoarele mulțimi de numere reale, definite prin câte o proprietate a elementelor:

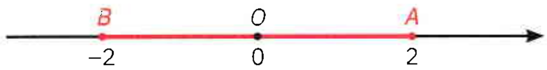
a. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$; **b.** $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4{,}5 \le x \le 2\}$; **c.** $C = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le x < \frac{4}{3}\right\}$;

d. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{2}\}$; **e.** $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -4{,}5 \le x\}$; **f.** $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le \sqrt{3}\}$.

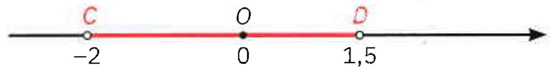
Dintre acestea:

- *A*, *B* și *C* sunt intervale mărginite: $A = (-2, 3)$, $B = [-4{,}5; 2]$, $C = \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$;
- *D*, *E* și *F* sunt intervale nemărginite: $D = \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$, $E = [-4{,}5; +\infty)$, $F = \left(-\infty, \sqrt{3}\right]$.

2. O mulțime de numere reale reprezentată pe axa numerelor printr-un segment este un interval mărginit:

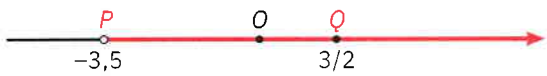


Mulțimea reprezentată prin segmentul închis *BA* este intervalul închis $[-2, 2]$.



Mulțimea reprezentată prin segmentul deschis *CD* este intervalul deschis $(-2; 1{,}5)$.

3. O mulțime de numere reale care se reprezintă pe axa numerelor sub forma unei semidrepte este un interval nemărginit.

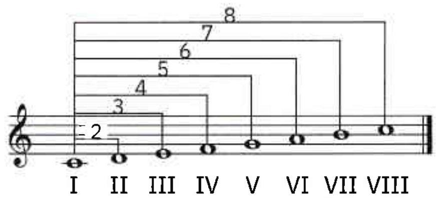


Semidreapta deschisă *PQ* este reprezentarea pe axă a intervalului $(-3{,}5; +\infty)$.

Semidreapta închisă *RS* este reprezentarea pe axă a intervalului $(-\infty, 1]$.

Cultură matematică

În muzică, un interval este raportul dintre înălțimile a două note. Intervalul muzical constituie elementul de construcție fundamental în orice alcătuire melodică sau armonică. Muzica pe care o ascultăm este o înșiruire, interesantă și creativă, de intervale muzicale.



2.2. Intersecția și reuniunea intervalelor

Situație problemă

Lunea, elevii clasei a VIII-a A dintr-o școală au ore în intervalul orar 8-13, iar elevii clasei a VIII-a B au ore de la 9 la 14.

a. În ce interval orar au fost prezente în același timp la cursuri ambele clase?

b. În ce interval orar au fost prezenți la cursuri elevii de clasa a VIII-a?

Ora	a VIII-a A	a VIII-a B
8:00	Istorie	
9:00	Franceză	Engleză
10:00	Matematică	Română
11:00	Fizică	Matematică
12:00	Desen	Muzică
13:00		Geografie
14:00		

Asociem perioadelor de timp petrecute la școală de cele două clase intervalele $[8, 13]$, respectiv $[9, 14]$.

Întrucât intervalele sunt mulțimi de numere, putem efectua cu acestea operațiile de intersecție, respectiv reuniune.

Cele două clase au fost simultan la cursuri de la ora 9 la ora 13. Așadar, $[8, 13] \cap [9, 14] = [9, 13]$.

Elevii de clasa a VIII-a, fie de la o clasă, fie de la cealaltă, se află în școală între orele 8 și 14. Putem scrie $[8, 13] \cup [9, 14] = [8, 14]$.

De reținut

Se consideră două intervale de numere reale, *I* și *J*. Atunci:

- mulțimea $I \cup J = \{x \mid x \in I \text{ sau } x \in J\}$ se numește *reuniunea intervalelor I și J*;
- mulțimea $I \cap J = \{x \mid x \in I \text{ și } x \in J\}$ se numește *intersecția intervalelor I și J*.

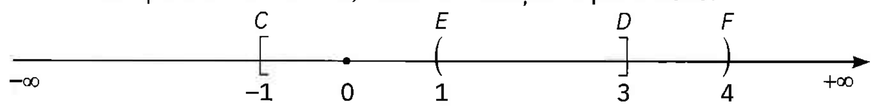
Pentru determinarea intersecției și a reuniunii a două sau mai multe intervale, se poate utiliza reprezentarea lor geometrică pe axa numerelor.

Exemplu

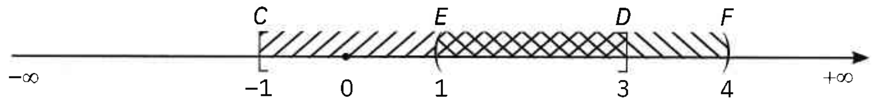
Fie intervalele $I = [-1, 3]$ și $J = (1, 4)$. Pentru a determina mulțimile $I \cap J$ și $I \cup J$, parcurgem pașii:

Pasul 1: Reprezentăm pe axă numerele -1, 3, 1 și 4 (capetele intervalelor I și J) și obținem punctele $C(-1)$, $D(3)$, $E(1)$ și $F(4)$.

Intervalului I îi corespunde, pe axă, segmentul închis CD, iar lui J îi corespunde segmentul deschis EF. Marcăm corespunzător aceste intervale pe axa numerelor, folosind notația cu paranteze:



Pasul 2: Hașurăm segmentul CD într-un anumit sens și segmentul EF în alt sens.



Pasul 3: Intersecția intervalelor I și J este mulțimea punctelor hașurate în ambele sensuri:

$$I \cap J = (1, 3].$$

Reuniunea intervalelor I și J este mulțimea punctelor hașurate cel puțin o dată.

$$I \cup J = [-1, 4).$$

Observații

Intersecția a două intervale poate fi:

un interval	un punct	mulțimea vidă
$(2, 6) \cap (-1, 4) = (2, 4)$	$[0, 2] \cap [2, 5] = \{2\}$	$(-2, 1) \cap (2, 4) = \varnothing$
$[-2, 3] \cap [1, \infty) = [1, 3]$	$(-1, 1] \cap [1, \infty) = \{1\}$	$(-\infty, 2) \cap [2, 4] = \varnothing$

Reuniunea a două intervale poate fi:

un interval	o mulțime care nu este interval
$[0, 2] \cup [2, 5] = [0, 5]$	$(-2, 1) \cup (3, 5)$
$(-\infty, 1) \cup (0, 4) = (-\infty, 4)$	$(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$
$(-\infty, 5) \cup (-1, \infty) = \mathbb{R}$	$[0, 4] \cup (8, \infty)$

Portofoliu

1. Folosiți reprezentările grafice ale intervalelor pe axa numerelor pentru a efectua operațiile cu intervalele indicate la rubrica Observații, de mai sus, punând în evidență legătura dintre:
   - operațiile de intersecție și de reuniune a intervalelor;
   - intersecția și reuniunea segmentelor sau a semidreptelor.
2. Dați câte două exemple pentru fiecare tip de mulțime care poate fi obținută ca rezultat al intersecției, respectiv reuniunii a două intervale.

2.3. Modulul unui număr real

Activitate pe echipe

Se împarte clasa în două grupe, colegii de bancă fiind în grupe diferite.

Fiecare elev trebuie să scrie pe o foaie de hârtie numere reale cu modulul mai mic sau egal cu 4, respectând următoarele condiții:

Grupa 1:

A1 trei numere naturale;
B1 trei numere raționale negative;
C1 trei numere iraționale pozitive.

Grupa 2:

A2 trei numere întregi negative;
B2 trei numere raționale pozitive;
C2 trei numere iraționale negative.

Numerele scrise sunt prezentate la tablă, însoțite de justificările necesare.